

# COPULE DE GUMBEL

Caillat Anne-lise, Dutang Christophe,  
Larrieu Marie Véronique et NGuyen Triet

Groupe de travail ISFA 3  
sous la direction de Stéphane Loisel

Année Universitaire 2007-2008

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Caractéristiques</b>	<b>3</b>
2.1	Définition . . . . .	3
2.2	Copule archimédienne . . . . .	3
2.3	Fonction de répartition . . . . .	3
2.4	Densité . . . . .	4
2.5	Copule singulière . . . . .	5
2.6	Valeur particulière du paramètre $\alpha$ . . . . .	5
2.7	Mesures de dépendance . . . . .	5
2.7.1	Coefficient de corrélation de Kendall . . . . .	5
2.7.2	Coefficient de corrélation de Spearman . . . . .	6
2.8	Dépendance des queues et copule extrême . . . . .	7
2.9	Copule multivariée . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Simulation</b>	<b>8</b>
3.1	Algorithme “ $K_C$ ” . . . . .	8
3.2	Représentation à facteurs communs . . . . .	8
3.3	Exemple de graphiques . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Estimation et implémentation</b>	<b>10</b>
4.1	Les méthodes de calibrage . . . . .	10
4.1.1	Méthode des moments . . . . .	10
4.1.2	Maximum de vraisemblance exact . . . . .	10
4.1.3	Inférence sur les marginales . . . . .	11
4.1.4	Maximum de vraisemblance canonique . . . . .	11
4.2	Le package R <b>gumbel</b> . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Application aux couvertures de produits indiciels</b>	<b>11</b>
5.1	Présentation . . . . .	12
5.2	Calibration . . . . .	12
5.3	Évaluation du payoff . . . . .	13
	<b>Bibliographie</b>	<b>14</b>
	<b>Annexes</b>	<b>15</b>
<b>A</b>	<b>Densité de la copule de Gumbel</b>	<b>15</b>
<b>B</b>	<b>Valeur particulière de <math>\alpha</math></b>	<b>15</b>
<b>C</b>	<b>Dépendance des extrêmes</b>	<b>16</b>

## 1 Introduction

Les copules constituent un outil statistique permettant de modéliser la dépendance entre des variables aléatoires. La fonction copule relie en effet la densité jointe aux densités marginales et contient ainsi toute l'information sur la structure de dépendance du modèle.

Nous nous intéresserons dans ce document à une copule particulière, soit la copule de Gumbel. Dans la littérature, elle est parfois appelée copule de Gumbel - Hougaard. Pour la clarté de l'exposé, nous traiterons ici le cas bivarié et nous finirons par une généralisation au cas multivarié. La plupart des informations sont tirées de Nelsen (2006).

Ce document s'articulera principalement autour de quatre axes : nous définirons tout d'abord la copule de Gumbel ainsi que ses caractéristiques, nous présenterons ensuite les techniques de simulation. Puis nous présenterons l'implémentation des divers outils présentés jusqu'ici, ainsi que les méthodes de calibration. Enfin, nous terminerons par une application de la copule de Gumbel au produit indiciel.

## 2 Caractéristiques

### 2.1 Définition

La copule de Gumbel est définie par la fonction bivariée :

$$C_\alpha(u, v) = \exp \left[ - \left( (-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right],$$

où  $\alpha \geq 1$  est le paramètre de la copule.

### 2.2 Copule archimédienne

Si on prend  $\phi_\alpha(t) = (-\ln t)^\alpha$  avec  $\alpha \geq 1$  et  $t \in [0, 1]$  comme fonction génératrice, on vérifie facilement que :

- la fonction génératrice inverse est  $\phi_\alpha^{-1}(t) = e^{-t^{1/\alpha}}$ ,
- $\phi_\alpha(0) = +\infty$ , ce qui traduit le caractère strict du générateur
- $\phi_\alpha(1) = 0$ ,
- $\phi'_\alpha(t) = -\frac{\alpha}{t}(-\ln t)^{\alpha-1}$  et  $\phi'_\alpha(t) < 0$  pour  $\alpha \geq 1$ ,
- $\phi''_\alpha(t) = \frac{\alpha}{t^2}(-\ln t)^{\alpha-2}[\alpha - 1 - \ln t]$  et  $\phi''_\alpha(t) \geq 0$  pour  $\alpha \geq 1$ .

Ainsi,  $\phi$  est une fonction continue strictement décroissante de  $[0, 1]$  dans  $[0, +\infty]$ , convexe et est un générateur strict.

Et nous retrouvons la famille de Gumbel par la relation  $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v))$ . Les copules archimédiennes forment des familles de copules qui possèdent plusieurs propriétés intéressantes<sup>1</sup>.

### 2.3 Fonction de répartition

La fonction copule  $C_\alpha$  est par définition la fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires à marginales uniformes et de loi jointe  $C_\alpha$ .

---

1. Certaines de ces propriétés seront utilisées dans les paragraphes qui suivent afin de mettre l'accent sur certaines caractéristiques propres à la copule de Gumbel.

$$\forall \alpha \geq 1, \forall (u, v) \in [0, 1]^2, C_\alpha(u, v) = \exp \left[ -((- \ln u)^\alpha + (- \ln v)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right].$$

## 2.4 Densité

Nous savons que la densité d'une copule archimédienne, de générateur  $\phi$  deux fois différentiable, est telle que

$$c_\alpha(u, v) = - \frac{\phi'_\alpha(C_\alpha(u, v)) \phi'_\alpha(u) \phi'_\alpha(v)}{\phi'_\alpha(C_\alpha(u, v))^3}$$

Donc

$$c_\alpha(u, v) = - \frac{\frac{\alpha}{C_\alpha(u, v)^2} [(- \ln u)^\alpha + (- \ln v)^\alpha]^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \left[ \alpha - 1 + [(- \ln u)^\alpha + (- \ln v)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right] \frac{-\alpha}{u} (- \ln u)^{\alpha-1} \frac{-\alpha}{v} (- \ln v)^{\alpha-1}}{- \frac{\alpha^3}{C_\alpha(u, v)^3} [(- \ln u)^\alpha + (- \ln v)^\alpha]^3 \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)}$$

Nous obtenons la densité suivante :

$$\forall u, v \in ]0, 1[^2, c_\alpha(u, v) = C_\alpha(u, v) [\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v)]^{\frac{1}{\alpha}-2} \left[ \alpha - 1 + (\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v))^{\frac{1}{\alpha}} \right] \frac{\phi_{\alpha-1}(u) \phi_{\alpha-1}(v)}{uv}.$$

L'expression supra de la densité n'est pas valable sur les bords du pavé  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Sur les bords du domaine, nous avons les expressions suivantes :

$$\forall u > 0, v < 1, c_\alpha(u, 0) = c_\alpha(0, u) = c_\alpha(1, v) = c_\alpha(v, 1) = 0,$$

tout en sachant que la densité n'est pas définie aux points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)^2$ .

La copule de Gumbel est caractérisée par des concentrations importantes dans les queues de distribution<sup>3</sup>. Sur la figure 1, on constate que la copule de Gumbel est dissymétrique à droite. Ce résultat se retrouve dans les coefficients de dépendance de queue dans la section 2.8.

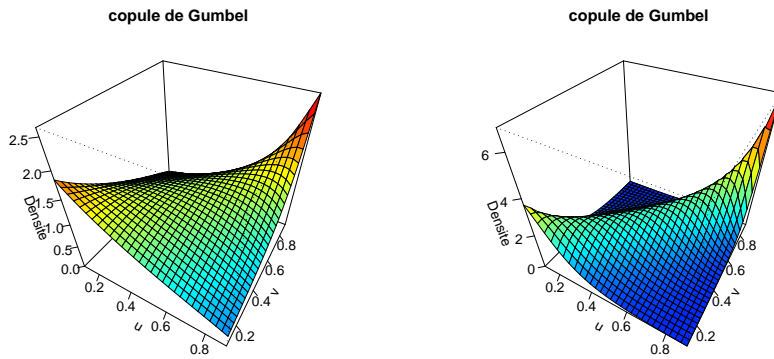


FIGURE 1 – Densité de la copule de Gumbel ( $\alpha = 1,5$  à gauche et  $\alpha = 3$  à droite)

2. cf annexe A.

3. on a  $c_\alpha(0, 0) = c_\alpha(1, 1) = +\infty$ .

## 2.5 Copule singulière

Comme la fonction copule  $C_\alpha$  est deux fois différentiable par rapport à  $u$  et  $v$ , alors la copule de Gumbel ne possède pas de partie singulière.

## 2.6 Valeur particulière du paramètre $\alpha$

Les différents dépendances limites sont résumées dans le tableau infra 1. Les démonstrations se trouvent en annexe B.

$\alpha$	1	$]1, +\infty[$	$+\infty$
$C_\alpha$	$C^\perp$	$C_\alpha$	$C^+$
type	Indépendance	Dépendance positive	Comonotonie

TABLE 1 – Valeur particulière de  $\alpha$

La valeur au risque ou “Value at Risk” étant comonotone additive, on retrouve le fait que la VaR de la somme est la somme des VaR lorsque les variables sont comonotones. On considère un couple aléatoire structuré par  $C_\alpha$  et de marginales normales centrées réduites. Sur la figure 2, nous avons tracé la VaR à 90% de la variable  $X+Y$  en fonction du paramètre  $\alpha$  de la copule, où  $X$  et  $Y$  sont de loi normale centrée réduite. On constate que  $VaR(X+Y)$  tends vers  $VaR(X) + VaR(Y)$ . Le caractère ératique vient du fait que la VaR est calculée par simulation<sup>4</sup> (comme le 90<sup>ème</sup> percentile du vecteur simulée).

## 2.7 Mesures de dépendance

Il y a maintes façons de mesurer la dépendance entre deux variables aléatoires. Nous présentons ici le tau de Kendall et le rho de Spearman, deux mesures de concordance classiques.

### 2.7.1 Coefficient de corrélation de Kendall

Le tau de Kendall est défini par

$$\tau \triangleq 4 \iint_{[0,1]^2} C(u,v) dC(u,v) - 1 = 4E(C(U,V)) - 1 = 4E(X) - 1.$$

où  $U$  et  $V$  sont deux variables aléatoires uniformes et  $X$  la variable aléatoire  $C_\alpha(U, V)$ . Pour une copule archimédienne, la fonction de répartition de  $X$  est donnée par

$$K_C(t) = t - \frac{\phi_\alpha(t)}{\phi'_\alpha(t)}$$

soit dans le cas de la copule de Gumbel,

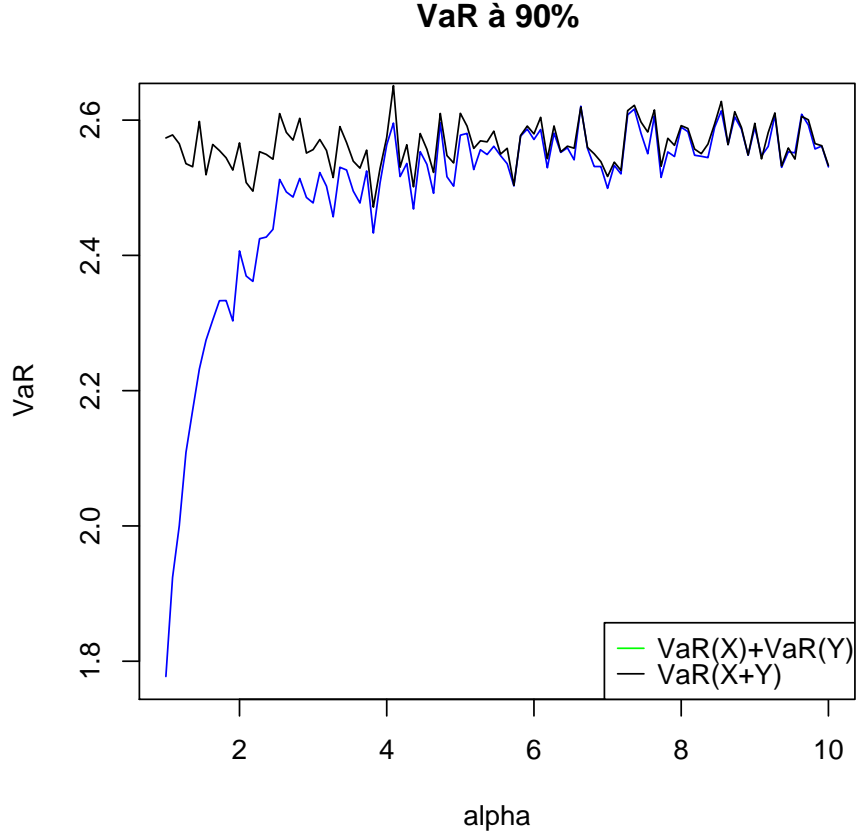
$$K_C(t) = t - \frac{t \ln t}{\alpha}$$

Ainsi, la densité de  $X$

$$K'_C(t) = 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{\ln t}{\alpha}.$$

---

4. à l'aide de la fonction `quantile` ou de la fonction `VaR` du package `actuar`.

FIGURE 2 –  $VaR_{90\%}(X) + VaR_{90\%}(Y) \leq VaR_{90\%}(X + Y)$ 

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^1 t K'_C(t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t \ln t}{\alpha} dt \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \left( \left[ \frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \left[ \frac{t^2}{4} \right]_0^1 \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2\alpha} \right)
 \end{aligned}$$

D'où le tau de Kendall s'exprime de la manière suivante :

$$\tau = \frac{\alpha-1}{\alpha}.$$

Le paramètre  $\alpha$  mesure le degré de dépendance entre les risques. Plus il est élevé, plus la dépendance est forte. On retrouve le fait que  $C_\infty = C^+$ , puisque le tau de Kendall tend vers 1.

### 2.7.2 Coefficient de corrélation de Spearman

Le  $\rho$  de Spearman quant à lui se définit par

$$\rho_S = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u,v) du dv - 3$$

Cependant, il n'y a pas de formules explicites pour le  $\rho$  de Spearman dans le cas de la copule de Gumbel.

## 2.8 Dépendance des queues et copule extrême

Le concept de dépendance de queue renseigne sur la “quantité” de dépendance au niveau des queues de distribution. C'est un outil pertinent pour l'étude de la survenance simultanée de valeurs extrêmes. C'est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesure la dépendance sur l'ensemble de la distribution. On définit les coefficients de dépendance de queue à gauche et à droite pour un couple  $(X, Y)$  par

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P(Y > F_Y^{-1}(t)/X > F_X^{-1}(t)) \quad \text{et} \quad \lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P(Y > F_Y^{-1}(t)/X > F_X^{-1}(t)).$$

Pour la copule de Gumbel, il existe des formules explicites pour  $\lambda_U$  et  $\lambda_L$ .

$$\lambda_L = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On retrouve le fait que la copule est asymétrique à droite.

La copule de Gumbel est une copule extrême car elle vérifie la propriété du max-stabilité<sup>5</sup>

$$C_\alpha \left( u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}} \right)^n = C_\alpha(u, v).$$

La propriété de max-stabilité s'interprète de la manière suivante. Soient deux vecteurs aléatoires  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  identiquement distribués tels que les couples  $(X_j, Y_j)$  ont la même copule  $C$ .

On pose  $C_{max}$  la copule du couple  $(X_{(n)}, Y_{(n)}) = (\max_{1 \leq i \leq n} X_i, \max_{1 \leq i \leq n} Y_i)$ . Par Nelsen (2005), nous obtenons la propriété suivante :

$$C_{max} = C \left( u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}} \right)^n.$$

Autrement dit pour la copule de Gumbel, le couple  $(X_j, Y_j)$  et le couple  $(X_{(n)}, Y_{(n)})$  ont la même copule.

## 2.9 Copule multivariée

On sait que pour les copules archimédiennes la propriété de super modularité en dimensions  $n$  est équivalent à ce que le générateur  $\phi$  soit complètement monotone (i.e.  $\forall i, (-1)^i \frac{d^i \phi(t)}{dt^i} \geq 0$ ). D'après Nelsen (2006), le générateur de la copule de Gumbel est complètement monotone. Par conséquent, la copule de Gumbel multivariée se définit de la manière suivante

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = \exp \left( - \left[ \sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\alpha \right]^{1/\alpha} \right)$$

Pour une copule archimédienne, la densité s'exprime de la manière suivante

$$c(u_1, \dots, u_n) = (\phi^{-1})^{(n)} (\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)) \prod_{i=1}^n \phi'(u_i)$$

d'après Savu & Trede (2006). Malheureusement pour la copule de Gumbel, la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de l'inverse du générateur n'a pas d'expressions explicites. Pour  $n = 3$ , nous obtenons

$$c_\alpha(u_1, u_2, u_3) = C_\alpha(u_1, u_2, u_3) \frac{\phi_{\alpha-1}(u_1)\phi_{\alpha-1}(u_2)\phi_{\alpha-1}(u_3)}{u_1 u_2 u_3} \Sigma^{\frac{1}{\alpha}-3} \left[ (2\alpha-1)(\alpha-1) + 3(\alpha-1)\Sigma^{\frac{1}{\alpha}} + \Sigma^{\frac{2}{\alpha}} \right],$$

où  $\Sigma$  est défini par  $\phi(u_1) + \phi(u_2) + \phi(u_3)$ .

5. c'est la seule copule archimédienne vérifiant cette propriété, cf. annexe C.

### 3 Simulation

Il existe plusieurs algorithmes pour simuler des variables aléatoires selon une copule bien précise. Les deux algorithmes infra sont spécifiques aux copules archimédiennes.

#### 3.1 Algorithme “ $K_C$ ”

D’après Nelsen (2005), le couple de variables aléatoires  $\left(C_\alpha(U, V), \frac{\phi_\alpha(U)}{\phi_\alpha(U) + \phi_\alpha(V)}\right)$  est à composantes indépendantes. Par conséquent, on en déduit l’algorithme suivant

1. simuler  $(y, t) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$
2.  $x := K_C^{-1}(t)$  où  $K_C(t) = t - \frac{t \ln t}{\alpha}$
3.  $u := \phi^{-1}(\phi(x)y)$  et  $v := \phi^{-1}(\phi(x)(1 - y))$

La non généralisation en dimension  $n$  et la non existence de formule explicite pour  $K_C^{-1}$  nous ont incité à chercher un autre algorithme plus puissant.

#### 3.2 Représentation à facteurs communs de Marshall & Olkin (1988)

L’approche de Marshall & Olkin (1988) consiste à utiliser une variable aléatoire  $\Theta$  pour un vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_d)$  tel que les composantes  $X_i$  sont indépendantes conditionnellement à  $\Theta$ . La loi jointe du vecteur  $(X_1, \dots, X_d)$  est donnée par

$$F_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) = L_\Theta \left( \sum_{i=1}^d L_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \right)$$

où  $L_\Theta$  désigne la transformée de Laplace de la variable aléatoire  $\Theta$ . De plus, l’algorithme suivant permet de simuler des variables aléatoires de copule archimédienne  $L_\Theta^{-1}$  :

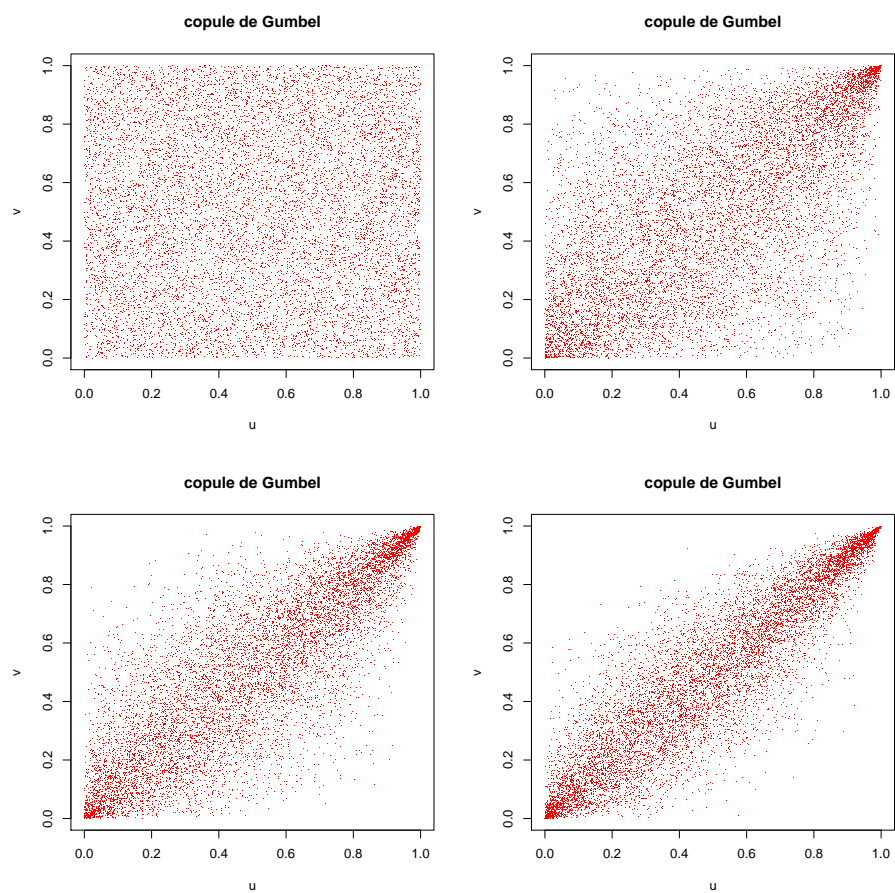
1. simuler  $(x_1, \dots, x_d) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{E}(1)$
2. simuler  $\theta$  suivant la loi de transformée de Laplace  $\phi^{-1}$
3.  $\forall i, u_i := \phi^{-1}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)$

Dans le cas de la copule de Gumbel,  $\phi^{-1}(t) = e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}}$ , qui est la transformée de Laplace d’une loi stable de paramètres  $(\frac{1}{\alpha}, 0, 1, 0)$ . Pour plus de détails sur les lois stables, se reporter à Nolan (2005). Enfin pour simuler des variables aléatoires de loi stable, nous avons utilisé l’algorithme de Chambers et al. (1976).

#### 3.3 Exemple de graphiques

En traçant 10000 réalisations des composantes d’un couple  $(U, V)$  de loi jointe  $C_\alpha$  (pour  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ), on obtient les graphiques suivants.



FIGURE 3 – Tracés de couples  $(u, v)$  de copule de Gumbel

## 4 Estimation et implémentation

Dans un premier temps, nous rappelons les méthodes d'estimation pour calibrer une copule. Ensuite, nous présentons notre package R intitulé **gumbel** implémentant tous les outils nécessaires à la copule de Gumbel.

### 4.1 Les méthodes de calibrage

Tout comme les copules archimédiennes de Clayton et de Frank, la copule de Gumbel présente l'avantage d'avoir un seul paramètre à calibrer. Nous faisons un bref rappel des méthodes d'estimation spécifiques aux copules.

#### 4.1.1 Méthode des moments

Cette méthode consiste à estimer les paramètres  $\theta$  des lois marginales et le paramètre  $\alpha$  de la copule par la méthode des moments i.e.

1. résoudre le système à  $d$  équations et  $d$  inconnues

$$\begin{cases} \bar{X}_n = f(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ S_n^2 = g(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \mu_{3,n} = h(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \vdots \end{cases} ,$$

où  $d$  désigne la dimension de  $\theta$ ,  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont les expressions des moments (ordinaires) d'ordre 1, 2 et 3 en fonction du paramètre  $\theta$ . répéter cette étape pour toutes les marginales.

2. inverser le tau de Kendall ou le rho de Spearman pour obtenir le paramètre  $\alpha$  de la copule.

Pour des marginales exponentielles  $\mathcal{E}(\lambda)$  et une copule de Gumbel, on trouve

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n} \text{ et } \hat{\alpha}_n = \frac{1}{1 - \tau_n},$$

où  $\tau_n$  désigne le tau de Kendall empirique.

#### 4.1.2 Maximum de vraisemblance exact

Dans le cas où la densité de la copule existe, on peut utiliser les estimateurs de maximum de vraisemblance. Pour simplifier, on suppose qu'on utilise une copule bivariee  $C_\alpha$ , ayant une densité et que les lois des marginales possèdent des densités. On note  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les paramètres des lois marginales. La log vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(\alpha, \theta_1, \theta_2, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= \sum_{i=1}^n \ln (c(F_1(x_i, \theta_1), F_2(y_i, \theta_2), \alpha)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \ln (f_1(x_i, \theta_1)) + \sum_{i=1}^n \ln (f_2(y_i, \theta_2)). \end{aligned}$$

Bien souvent, il n'existe pas d'expressions explicites des estimateurs maximisant  $\ln \mathcal{L}$ , et on réalise donc une maximisation numérique.

### 4.1.3 Inférence sur les marginales

Toujours dans l'hypothèse où la copule a une densité, on peut mélanger les deux premières approches, en estimant d'abord les paramètres des lois marginales, puis en estimant le paramètre de la copule. Cela consiste à :

1. estimer les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par maximum de vraisemblance
2. construire les pseudo données  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $u_i = F_1(x_i, \hat{\theta}_1)$  et  $v_i = F_2(y_i, \hat{\theta}_2)$
3. estimer le paramètre  $\alpha$  en maximisant la log-vraisemblance

$$\ln \mathcal{L}(\alpha, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \ln (c(u_i, v_i, \alpha)).$$

Cette méthode présente l'avantage d'utiliser les estimateurs "classiques" de maximum vraisemblance des marginales.

### 4.1.4 Maximum de vraisemblance canonique

C'est une méthode semi-paramétrique, qui se base sur la méthode précédente :

1. calculer les fonctions de répartition empirique  $F_{1,n}$  et  $F_{2,n}$
2. construire les pseudo données  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $u_i = F_{1,n}(x_i)$  et  $v_i = F_{2,n}(y_i)$
3. estimer le paramètre  $\alpha$  en maximisant la log-vraisemblance

$$\ln \mathcal{L}(\alpha, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \ln (c(u_i, v_i, \alpha)).$$

## 4.2 Le package R gumbel

Nous avons réalisé un package R pour la copule de Gumbel. Les package R présentent le gros avantage de fournir rapidement du code documenté, et donc réutilisable par quelqu'un d'autres que ses concepteurs.

Notre package **gumbel** fournit la fonction de répartition : **pgumbel** (valable en dimension  $n$ ), la densité : **dgumbel** (valable pour  $n \leq 3$ ) et un générateur aléatoire : **rgumbel** (valable en dimension  $n$  quelconque).

De plus, nous avons implémenté les 4 méthodes d'estimation présentées ci dessus :

- la méthode des moments ("Moment-Based Estimation") : **gumbel.MBE**,
- le maximum de vraisemblance exacte ("Exact Maximum Likelihood") : **gumbel.EML**,
- l'inférence sur les marginales ("Inference For Margins") : **gumbel.IFM**,
- le maximum de vraisemblance canonique ("Canonical Maximum Likelihood") : **gumbel.CML**.

L'aide (en anglais) pour les différentes fonctions s'obtient avec la commande **help** le nom de la fonction ou plus simplement **help(gumbel)** après avoir chargé le package à l'aide **library("gumbel")**. Dans cette aide figure les détails sur l'utilisation des différentes fonctions ainsi que des exemples.

## 5 Application aux couvertures de produits indiciels

La copule de Gumbel a l'avantage de décrire les dépendances asymétriques, où les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure diffèrent. Elle possède la caractéristique de pouvoir représenter des risques dont la structure de dépendance est accentuée sur la queue supérieure. De manière générale, la copule de Gumbel est à ce titre particulièrement adaptée en assurance et en finance pour étudier l'impact de la survenance d'événements de forte

intensité sur la dépendance entre branches d'assurance, actifs financiers ou indices. Nous illustrons cette caractéristique avec l'application suivante sur la couverture d'un produit indiciel, où nous allons prendre en compte la dépendance entre stations météorologiques pour la construction d'un indice.

### 5.1 Présentation

Nous avons utilisé la copule de Gumbel pour valoriser les couvertures indicielles cat[astrophe]. Ces contrats sont des dérivés climatiques adaptés à la réassurance d'évènement catastrophe (tempête, vague de froid,...) basé sur un indice climatique (force du vent, température,...). Cette application numérique est basée sur l'article Dubreuil & Vendé (2005).

L'indice climatique doit refléter au mieux les caractéristiques des montants des sinistres associés au risque météo pour diminuer le risque de base. En général, on choisit un panier de  $n$  stations (peu éloignées des régions assurées) dans lesquelles on mesure la variable climatique  $X_i(t)$  au cours de la période  $[t-1, t]$ . Ensuite, l'indice journalier d'une station  $i$  est construit par  $I_i(t) = \min(L_i - K_i, X_i(t) - K_i)$  où  $K_i$  et  $L_i$  sont le seuil et la limite par station. Sur une période  $T$ , l'indice d'une station est donc défini par  $S_i(T) = \sum_{t=1}^T I_i(t)$  et l'indice cumulé par  $S_T = \sum_{i=1}^n p_i S_i(T)$  pour une pondération  $p_1, \dots, p_n$ . Enfin le flux engendré par la couverture indicielle est celui d'un call spread :

$$C_T = N \times \min(L - K, (S_T - K)_+),$$

où  $K$  et  $L$  sont la franchise et la limite du contrat, et  $N$  le montant nominal.

Pour notre exemple, on traite le risque "tempête" en Rhône Alpes.  $X_i(t)$  désigne donc la force maximale du vent (en m/s) par jour. Nous avons choisi deux stations Saint Martin en Haut (variable  $X$ ) et Echirolles (variable  $Y$ ) avec les seuils respectifs 10 et 9, et les limites 16 et 15<sup>6</sup>. On prend  $T = 600$  jours,  $N = 1$ ,  $K = 50$  et  $L = 200$ .

### 5.2 Calibration

Il faut calibrer la copule de Gumbel sur nos données recueillies sur les sites internet [www.meteoisere.com/Vantage](http://www.meteoisere.com/Vantage) et [hautsduyonnais.free.fr/](http://hautsduyonnais.free.fr/) entre août 2005 et avril 2007. Pour ce faire, un choix de marginales s'impose. Des marginales exponentielles se révélant totalement désastreux<sup>7</sup>, nous avons choisi des marginales gamma dont les paramètres de forme et de taux sont notés  $\alpha_X, \lambda_X$  pour Saint Martin en Haut et  $\alpha_Y, \lambda_Y$  pour Echirolles. On pose  $\alpha_{cop}$  le paramètre de la copule de Gumbel. Le tableau 2 infra récapitule nos résultats d'estimation :

Méthodes	MBE	EML	IFM	CML	moyenne
$\alpha_X$	4,885	4,954	4,833	-	4,891
$\lambda_X$	0,747	0,754	0,739	-	0,746
$\alpha_Y$	6,810	6,824	7,161	-	6,932
$\lambda_Y$	1,121	1,116	1,178	-	1,139
$\alpha_{cop}$	1,533	1,461	1,448	1,474	1,479

TABLE 2 – Estimations des paramètres

Pour la suite, nous choisissons les moyennes des estimations comme valeur de nos paramètres. Le bon ajustement des marginales se voit sur les graphes de la figure 4, où l'on voit

6. les seuils sont volontairement bas.

7. le test de Kolmogorov Smirnov rejette outrageusement l'hypothèse que les données suivent une loi exponentielle, tandis que le tracé de la fonction de répartition empirique et de la fonction de répartition de l'exponentielle révèle très clairement que l'hypothèse exponentielle est impossible.

que les fonctions de répartition calibrées (i.e. gamma avec les paramètres supra) s'ajustent bien sur les fonctions de répartition empiriques.

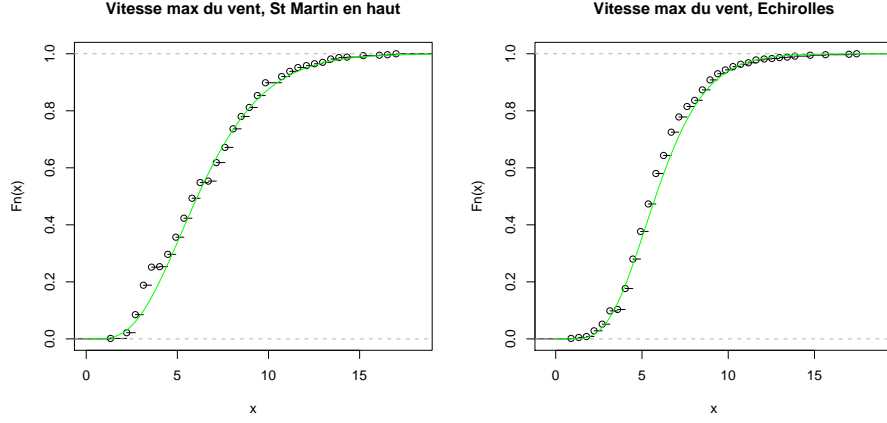


FIGURE 4 – Fonctions de répartition empiriques (en noir) et calibrées (en vert)

La bonne adéquation de la copule de Gumbel aux vitesses de vent maximales est confirmé par le tracé d'un qqplot empirique (cf. figure 5). Les nuages semblent équivalents. A priori, la copule de Gumbel est faite pour modéliser une dépendance des “extrêmes”, puisqu'elle est asymétrique.

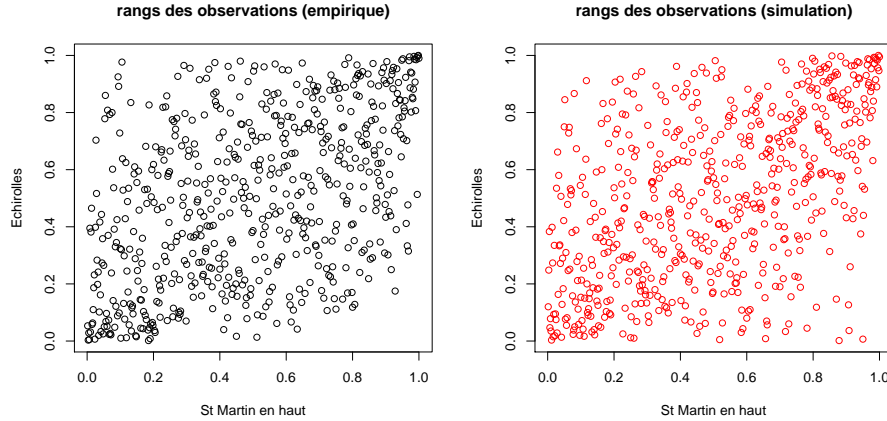


FIGURE 5 – qqplot empirique vs simulé

### 5.3 Evaluation du payoff

Maintenant que l'on a calibré notre copule (et les marginales), on va estimer le payoff  $C_T$  par une méthode de Monte Carlo. Nous avons réalisé 10000 simulations de période de 600 jours pour nos deux stations. Nous obtenons les résultats infra (tableau 3). On constate que même si la dépendance fait diminuer en moyenne le payoff, l'écart type et le quantile à 75% augmentent. Tout semble laisser penser que la dépendance augmente la queue de distribution.

Enfin, nous avons tracé les histogrammes (cf. figure 6) à pas fixe et à même effectif du payoff correspondant à nos données ( $\alpha_{cop} = 1,479$ ). Nous pouvons constater que la

$\alpha_{cop}$	1	1,25	1,479 (valeur estimée)	1,75	2
moyenne	79,21	79,14	79,11	78,93	78,95
écart-type	13,96	16,27	16,99	17,84	18,17
$Var_{75\%}$	88,69	89,94	90,26	90,68	91,03
$Var_{90\%}$	97,24	100,13	101,23	102,37	102,72

TABLE 3 – Statistiques des payoff  $C_T$  simulés

distribution des sinistres est légèrement asymétrique, surtout autour de sa moyenne. Par ailleurs, nous avons ajouté l'estimation de la densité par la méthode du noyau d'Epanechnikov. Maintenant, il ne reste plus qu'à choisir un principe de primes et calculer le prix de ce produit de couverture indiciel virtuel.

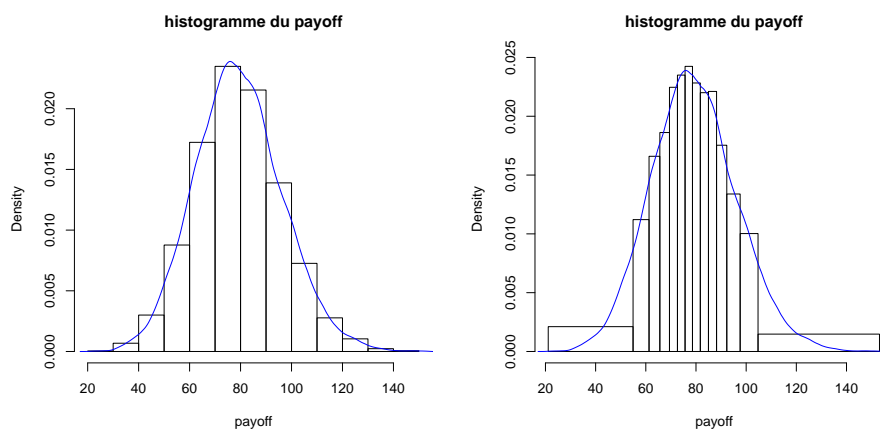


FIGURE 6 – Histogrammes à pas fixe et à même effectif

## Références

- Chambers, J. M., Mallows, C. L. & Stuck, B. W. (1976), 'A method for simulating stable random variables', *Journal of the American Statistical Association*, .
- Dubreuil, E. & Vendé, P. (2005), Les couvertures indicielles en réassurance catastrophe. Prise en compte de la dépendance spatiale dans la tarification.
- Marshall, A. W. & Olkin, I. (1988), 'Families of multivariate distributions', *Journal of the American Statistical Association* **83**.
- Nelsen, R. B. (2005), 'Dependence modeling with archimedean copulas'.
- Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Springer.
- Nolan, J. P. (2005), Stable distributions models for heavy tailed data, Technical report, Math Department American University.
- Savu, C. & Trede, M. (2006), Hierarchical archimedean copula. Institute of Econometrics, University of Münster.

## Annexes

### A Densité de la copule de Gumbel

On a

$$\forall u, v \in ]0, 1[^2, c_\alpha(u, v) = C_\alpha(u, v) \frac{\phi_{\alpha-1}(u)\phi_{\alpha-1}(v)}{uv} [\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v)]^{\frac{1}{\alpha}-2} \left[ \alpha - 1 + (\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v))^{\frac{1}{\alpha}} \right]$$

L'expression supra de la densité n'est pas valable sur les bords du pavé  $[0, 1] \times [0, 1]$ . En effet, si on cherche à calculer la dérivée seconde croisée  $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}$  en des points du bord, alors on constate qu'elle n'est pas définie. Dans un premier, on calcule  $\frac{\partial C}{\partial u}(0, v)$  :

$$\begin{aligned} \frac{C(0+h, v) - C(0, v)}{h-0} &= \frac{C(h, v)}{h} = e^{-\ln h} e^{-[(-\ln h)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{-\ln h} e^{+\ln h [1 + (\frac{\ln v}{\ln h})^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &= e^{\ln h \left[ \left[ 1 + \left( \frac{\ln v}{\ln h} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right]} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1, \end{aligned}$$

puisque en réalisant un développement limité (DL) de l'exposant, on a :

$$\left[ 1 + \left( \frac{\ln v}{\ln h} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\ln v}{\ln h} \right)^\alpha + O \left( \left( \frac{\ln v}{\ln h} \right)^\alpha \right).$$

Donc, on a

$$\frac{\partial C}{\partial u}(0, v) = 1 \text{ et par symétrie } \frac{\partial C}{\partial v}(u, 0) = 1.$$

De même, on trouve

$$\frac{\partial C}{\partial u}(0, 0) = 0 \text{ et par symétrie } \frac{\partial C}{\partial v}(0, 0) = 0.$$

puisque  $C(0+h, 0) = C(0, 0) = 0$ . Enfin, on aboutit à la non existence de  $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(0, 0)$ , par

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial u}(0, h) - \frac{\partial C}{\partial u}(0, 0)}{h-0} = \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

En se servant des calculs précédents, on trouve que  $\forall 0 < u, v < 1$ ,  $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(0, v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u, 0) = 0$

En appliquant le même raisonnement (i.e. avec un DL), on trouve que

$$\frac{\partial C}{\partial u}(1, v) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(1, v) - C(1-h, v)}{h} = 0$$

et

$$\frac{\partial C}{\partial u}(1, 1) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(1, 1) - C(1-h, 1)}{h} = 1$$

D'où, la non existence de  $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(1, 1)$  par

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial u}(1, 1) - \frac{\partial C}{\partial u}(1, 1-h)}{1 - (1-h)} = \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

Enfin, on a aussi,  $\forall 0 < u, v < 1$ ,  $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(1, v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u, 1) = 0$ .

### B Valeur particulière de $\alpha$

Pour  $\alpha = 1$ , on a

$$C_1(u, v) = C_\alpha(u, v) = \exp \left[ - \left( (-\ln u)^1 + (-\ln v)^1 \right)^1 \right] = uv$$

---

8. Pour simplifier, on omet l'indice  $\alpha$ .

Autrement dit,  $C_1$  est la copule d'indépendance.

De plus, si on suppose  $u \leq v$ , alors

$$C_\alpha(u, v) = \exp \left[ - \left( (-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \exp \left[ \ln u \left( \left( \frac{\ln v}{\ln u} \right)^\alpha + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} v$$

Ainsi  $C_\infty = C^+$  la copule de la borne supérieure de Fréchet, i.e. la copule comonotone.

Il est important de noter que quelques soit  $\alpha$ , la copule de Gumbel permet de modéliser seulement des dépendances positives.

## C Dépendance des extrêmes

Par un résultat de Nelsen (2006), on a que

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \phi^{-1}(2t)}{1 - \phi^{-1}(t)} \quad \text{et} \quad \lambda_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi^{-1}(2t)}{\phi^{-1}(t)}.$$

Pour notre copule de Gumbel, on a

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-(2t)^{\frac{1}{\alpha}}}}{1 - e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}}} = 2 - \frac{1 - \left( 1 - (2t)^{\frac{1}{\alpha}} + O\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right)}{1 - \left( 1 - t^{\frac{1}{\alpha}} + O\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right)} = 2 - \frac{(2t)^{\frac{1}{\alpha}} + O\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{t^{\frac{1}{\alpha}} + O\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}},$$

et

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(2t)^{\frac{1}{\alpha}}}}{e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(2^{\frac{1}{\alpha}} - 1)t^{\frac{1}{\alpha}}} = 0.$$

La copule de Gumbel vérifie la propriété de max-stabilité :

$$\begin{aligned} C_\alpha \left( u^{1/r}, v^{1/r} \right)^r &= \left[ \exp \left[ - \left( \left( -\ln u^{1/r} \right)^\alpha + \left( -\ln v^{1/r} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \right]^r = \exp \left[ -r \left( \left( -\frac{1}{r} \ln u \right)^\alpha + \left( -\frac{1}{r} \ln v \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \\ &= \exp \left[ - \left( (-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = C_\alpha(u, v) \end{aligned}$$